

## 求解平面并联机器人工作空间边界的折返式搜索算法

宋亚楠 崔建昆

(上海理工大学 机械工程学院, 上海 200093)

**摘要** 描述了求解平面并联机器人工作空间边界的一种新方法。通过对平面并联机器人的分析,建立了系统的运动方程,以方程逆解存在为条件,沿工作空间边界搜索边界点。将搜索到的所有边界点在 Matlab 中进行仿真出图,图形结果与用几何方法得到的边界完全一致。利用此方法可以很快得到较准确、清晰的工作空间边界。

**关键词** 并联机器人 工作空间 搜索算法

## Iterative Search Algorithm for Solving Planar Parallel Robot Workspace Boundary

Song Yanan Cui Jiankun

(College of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract** A new method for solving planar parallel robot workspace boundary is described. These position kinematics equations are derived from the analysis of planar parallel robot. The boundary points along with the workspace boundary is searched depending on the existence of inverse solutions for these position kinematics equations. All the boundary points can be simulated based on Matlab, the simulation is the same graphic with geometric mapping. More accurate, clear workspace boundary can be obtained by this method.

**Key words** Parallel robot Workspace Search algorithm

### 0 引言

机器人的工作空间是机器人操作器的工作区域,是评价机器人工作性能的重要指标。并联机器人具有刚度大、承载能力强、误差小、精度高、自重负荷比小、动力性能好、控制容易等一系列优点<sup>[1]</sup>,得到了广泛的应用。目前,机器人工作空间的求解方法主要有几何法、解析法和数值法<sup>[2]</sup>。几何法简单直观,但作图复杂,机构自由度较高时会显得十分不适用。解析法通常采用微分几何理论求解工作空间方程,计算非常复杂。由于计算机技术的发展,数值法在求解工作空间中备受青睐。搜索算法也应归为数值法中。文献<sup>[3]</sup>预先将工作空间分成小的区域,利用运动方程逆解判断候选区域是否为工作空间,最后将所有满足条件的区域组合,形成所求机器人的工作空间。此方法求得的工作空间边界会有较大误差。文献<sup>[4]</sup>中给出了定姿态工作空间的边界搜索法,以杆长条件作为

约束条件,以逐渐增加极角的方法搜索边界点,这种定步长增加极角的方法得到的边界点非常有限,会导致边界不准确。

本文中我们提出了一种新的求解工作空间边界的搜索方法。以运动方程逆解为判别条件,以折返式搜索方法寻找边界点。搜索过程中,根据工作空间大小的变化改变极角变化量,并利用 Matlab 软件进行仿真,求得机器人可达工作空间的边界。并在求解工作空间边界点的过程中,近似计算了所求工作空间的面积大小。

### 1 3-RRR 平面并联机器人系统模型

3-RRR 平面并联机器人是作平面运动的机器人,由 3 个转动副作为驱动,通过中间连杆带动动平台做平面运动。定平台和动平台的 3 个铰链点分别构成等边三角形,位于两个基圆上,具有明显的对称性。图 1 为 3-RRR 平面并联机器人系统模型。

3-RRR 平面并联机器人具有明显的对称性, 为方便计算, 可选其一个分支建立坐标系, 如图 2 所示。固定坐标系  $O-xy$  以基圆中心为坐标原点  $O$ , 移动坐标系  $O-XY$  建立在动平台的中心处  $P(X_P, Y_P)$ 。动平台相对于固定坐标系转角为  $\phi$ , 也即为平台姿态角。输入变量为杆  $A_iB_i$  与水平  $x$  轴夹角为  $r_i$ 。

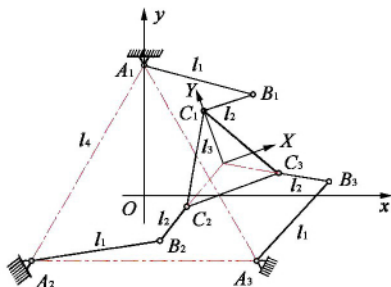


图 1 3-RRR 平面并联机器人

建立平面运动封闭矢量方程分别为

$$\mathbf{A}_i\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{C}_i \quad i=1,2,3 \quad (1)$$

式(1)中各矢量在  $x, y$  轴上的投影方程分别为

$$l_1 \cos r_i + l_2 \cos(r_i - \alpha_i) = x_{C_i} - x_{A_i} \quad (2)$$

$$l_1 \sin r_i + l_2 \sin(r_i - \alpha_i) = y_{C_i} - y_{A_i} \quad (3)$$

由式(2)、式(3)可得运动方程为

$$(x_{C_i} - x_{A_i} - l_1 \cos r_i)^2 + (y_{C_i} - y_{A_i} - l_1 \sin r_i)^2 = l_2^2 \quad (4)$$

平面坐标变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & X_P \\ \sin \phi & \cos \phi & Y_P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

由平面坐标变换, 则固定坐标系中一点  $m(x, y, z)$  与动坐标系中对应点  $M(X, Y, Z)$  的关系为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (6)$$

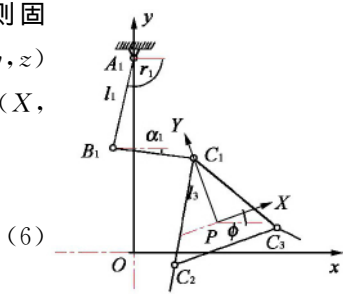


图 2 3-RRR 平面并联机器人坐标系模型

通过判断逆解运动方程(4)解的存在性, 可确定搜索点是否为工作空间内一点。若为工作空间内一点, 则方程(4)的解存在, 否则搜索点不是工作空间内的点。

## 2 工作空间边界搜索方法

以运动方程(4)逆解的存在性作为判断条件, 若存在, 则极径增加步长, 若不存在, 则极径变化量  $\Delta\rho$  减少, 然后再判断。如此折返式搜索可得到定姿态工

作空间边界点, 然后变化姿态角, 取最大的边界点作为可达工作空间的边界点, 在  $2\pi$  范围内变化极角, 当扫描一周后, 即可求得可达工作空间的所有边界点。整个搜索过程仅在初始搜索时考虑工作空间内部点, 一旦搜索到一个边界点, 就以此边界点为起点, 沿边界进行搜索。

具体操作步骤如下:

(1)将直角坐标系转化为极坐标系。在工作空间内寻找一点, 作为起始搜索点, 姿态角设为 0, 然后以一初始步长  $\Delta\rho$  开始向边界搜索,  $\Delta\rho$  可在工作空间范围内选择任意长度。

(2)搜索到一点后, 利用运动方程(4)求逆解, 若逆解存在, 则该点在工作空间内, 那么, 极径增加  $\Delta\rho$  后继续判断运动方程(4); 若逆解不存在, 则该点不在工作空间内, 那么, 极径  $\Delta\rho$  减少一半, 接着判断方程(4)。

(3)在步骤(2)的折返搜索过程中, 搜索点会不断接近工作空间边界点, 当  $\Delta\rho$  减少到一定值, 满足预设精度时(此预设精度可为大于 0 的任意小值), 可认为已经搜索到该姿态下的工作空间边界。

(4)调整步骤(3)步中搜到点的姿态角, 按定步长  $\Delta\phi = \frac{\pi}{180}$  逐步增加, 直至姿态角  $\phi$  接近  $2\pi$  位置, 此时搜索到的点  $M(\rho, \theta)$  可认为是可达工作空间的边界点, 将其保存在一个内存空间中。

(5)以点  $M$  的极径为直角边作一直角三角形, 另一直角边长设为 1(此处直角边长可为大于 0 的任意小值)。具体作图过程如图 3 所示。初始化姿态角  $\varphi$  为 0, 调整步骤(4)中搜索到的点  $M(\rho, \theta)$ , 得到新的起始搜索点  $N(\sqrt{\rho^2 + 1}, \theta + 1/\rho)$ 。

(6)以新的起始点  $N$  重复步骤(2)~步骤(5), 不断将步骤(4)中得到的点保存在一个空间中, 直到  $\theta$  角接近  $2\pi$ , 可认为可达工作空间的所有边界点已经找到。

(7)利用步骤(4)中得到的所有边界点即可得到可达工作空间的边界。

## 3 工作空间大小的求解

在搜索方法的步骤(5)中, 为了获得新的搜索起始点, 构造了一系列的直角三角形, 在构造三角形的过程中, 实际上也就是把工作空间分割成一系列三角形区域

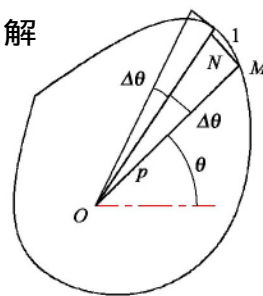


图 3 边界点调整示意图

的过程,当整个工作空间区域搜索完成后,也就可以在整个工作空间内完成三角形的分割。本文中提到的搜索法的另外的好处也就体现出来了,即可以近似计算工作空间的大小。

利用搜索过程中得到的一系列三角形区域,将这些三角形的面积大小进行求和,可以很容易得到工作空间的面积计算式

$$S = \sum_j \frac{1}{2} \times \rho_j \times 1 = \frac{1}{2} \sum_j \rho_j \quad (7)$$

其中, $j$  为求得第  $j$  个极径,也即第  $j$  个直角三角形。

此处的工作空间面积计算式虽然对于平面机构求得的,但仍然可以应用于空间机构工作空间体积的求解。在求解过程中可以对空间机构的工作空间进行分层处理,在每一层上应用本文中提到的面积公式,然后乘以相应的微分高度,就可近似求得每一层工作空间的体积,然后将每一层的工作空间体积叠加,即可求解整个工作空间体积,即

$$V = \frac{1}{2} \sum_k (\sum_j \rho_j \Delta Z_k) \quad (8)$$

其中, $\Delta Z_k$  为每层高度, $k$  为层数。

#### 4 3-RRR 平面并联机器人实例计算

考虑图 1 所示 3-RRR 平面并联机器人,求其可达工作空间,结构参数为

$l_1 = 225 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 175 \text{ mm}$ ,  $l_3 = 100 \text{ mm}$ ,  $l_4 = 300 \text{ mm}$  由式(4),即机构的运动方程,利用 Matlab 软件进行编程仿真,得到可达工作空间边界如图 4 所示。此处所得工作空间边界,与文献[5]中得出的工作空间边界相比较,可以看出,用本文介绍的搜索算法所得结果与用几何拓扑法得到的结果一致,可证明此搜索算法的正确性。

利用式(7)的面积计算公式,可得到该实例中工作空间面积为

$$S = 3.699 \times 10^5 \text{ mm}^2 \quad (9)$$

用几何作图法求解工作空间,作图过程十分复杂,而且只能定性描述,存在较大误差,而用计算机软件仿真,省去了繁杂的作图过程,提高了工作效率,而且十分方便,与作图法相比有较大优势。利用数值法求工作空间边界过程中,可明确知道工作空间边界的具体值,对于机构的结构优化、奇异位置判别都有很大帮助。

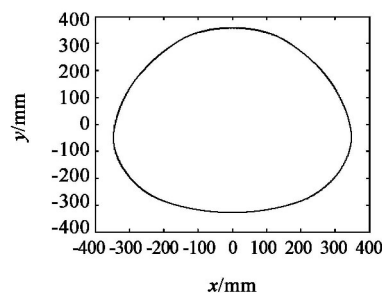


图 4 可达工作空间边界

#### 5 结论

本文中我们参考现有机器人工作空间的求解方法,提出了折返式搜索算法。给出了搜索算法的具体求解原理和步骤,并利用 Matlab 进行了仿真验证,得出的结果与用几何方法得到的结果完全一致,证明了所提方法的正确性。并在求解边界点的过程中计算了所求工作空间的面积大小,此方法完全可以应用于空间机构工作空间体积的求解。折返式搜索算法是一种快速极坐标搜索算法,由于在搜索过程中不考虑工作空间内部情况,只沿工作空间边界进行边界搜索,所以在求解过程中有很高的效率,得到的图形边界也更加准确、清晰。搜索算法属于数值法的范畴,在计算过程中能得到边界点的具体位置,为工作空间面积的计算、奇异位置的确定,以及机器人路径规划起到很好的参考作用。

#### 参 考 文 献

- [1] 陈在礼,陈学生,谢涛,等. 用遗传算法解具有给定工作空间的并联机构综合问题[J]. 中国机械工程, 2002, 13(3): 187-190.
- [2] Cao Yi, Lu Ke, Li Xiujuan, et al. Accurate numerical methods for computing 2D and 3D robot workspace[J]. International journal of Advanced Robotic Systems, 2011, 8(6): 1-13.
- [3] Huang Ming Z, Thebert Jean-Luc. A study of workspace and singularity characteristics for design of 3-DOF planar parallel robots[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2010, 51(5/6/7/8): 789-797.
- [4] 黄真,孔令富,方跃华. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京:机械工业出版社, 1997: 30-174
- [5] 崔建昆. 3-RRR 平面并联机器人的灵活工作空间[J]. 上海理工大学学报, 2005, 27(4): 365-368, 372.

收稿日期: 2014-09-03 收修改稿日期: 2014-10-24

作者简介: 宋亚楠(1991-), 男, 河南西平县人, 在读硕士研究生。